

Analisi Matematica I : III prova intermedia
Corso: OMARI ☐ TIRONI ☐

A.a. 2003–2004.

COGNOME e NOME _____ N. Matricola _____

Anno di Corso _____ Laurea in Ingegneria _____

ESERCIZIO N. 1. Si consideri la funzione razionale

$$f(x) = \frac{x-3}{(x-2)^2(x+1)}$$

(i) Si determini la decomposizione di Hermite di f .

Le radici di $(x-2)^2(x+1)$ sono -1 , con molteplicità 1 e 2 , con molteplicità 2. Quindi, per il teorema di decomposizione di Hermite, si ha

$$\frac{x-3}{(x-2)^2(x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{d}{dx} \left(\frac{C}{x-2} \right) = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} - \frac{C}{(x-2)^2},$$

con A, B, C opportune costanti reali. Moltiplicando per $(x-2)^2(x+1)$, si ottiene

$$x-3 = A(x-2)^2 + B(x+1)(x-2) - C(x+1) = (A+B)x^2 + (-4A-B-C)x + (4A-2B-C)$$

e quindi, per il principio d'identità dei polinomi,

$$\begin{cases} A+B & = \\ 0 & \\ -4A-B-C & = \\ 1 & \\ 4A-2B-C & = \\ -3 & \end{cases}$$

(ii) Si determinino tutte le primitive di f sull'intervallo $]2, +\infty[$.

(iii) Si determini quella primitiva F di f sull'intervallo $]2, +\infty[$ tale che $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 4$.

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \log x$$

(i) Si determinino:

- $\text{dom} f =$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) =$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$$

- $\text{Ord}_{0^+} f =$

$$\text{Ord}_{+\infty} f =$$

- $f'(x) =$

- i punti di annullamento e i segni di f' :

- la crescita, la decrescenza e gli estremi relativi e assoluti di f :

- $f''(x) =$

- i punti di annullamento e i segni di f'' :

- la concavità, la convessità e i punti di flesso di f :

(ii) Si determini il numero delle soluzioni $x \in \text{dom } f$ dell'equazione $f(x) = t$, al variare di $t \in \mathbb{R}$.